Dipartimento di Statistica Università di Bologna

Matematica finanziaria aa 2013-2014

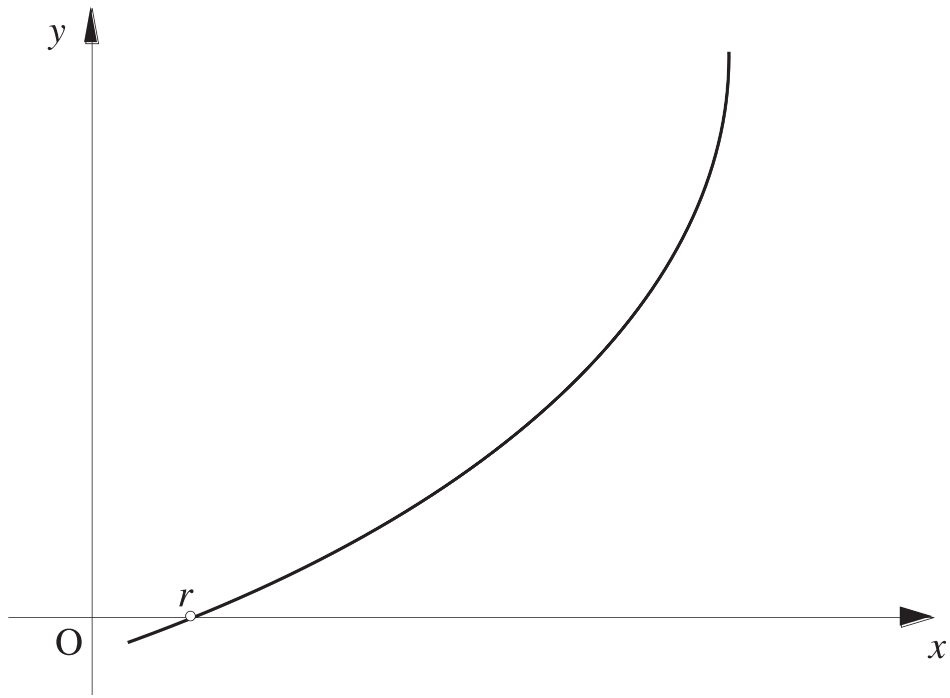
lezione 6: 25 febbraio 2014

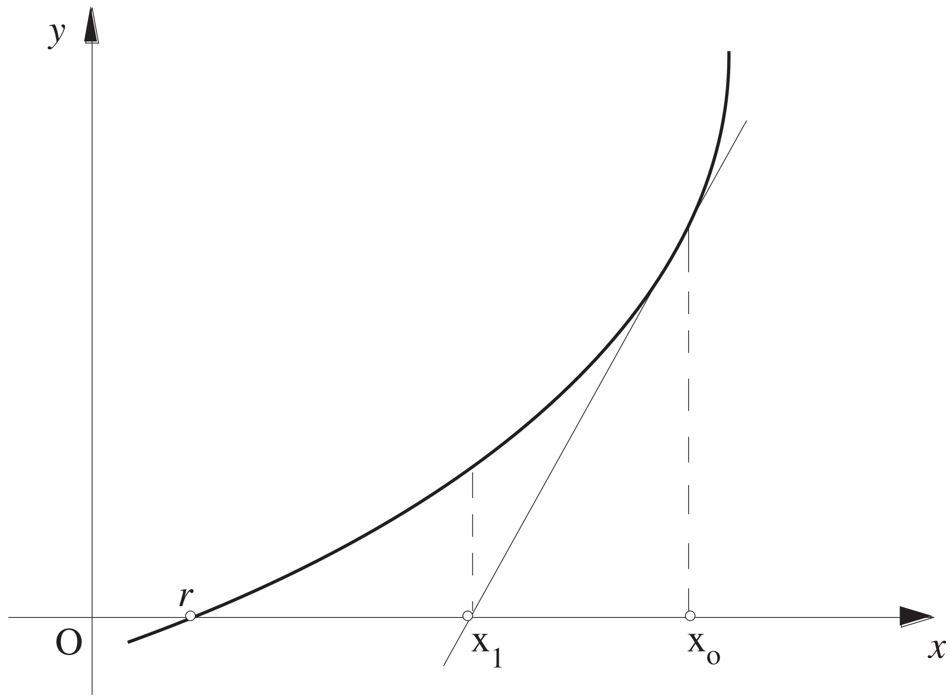
professor Daniele Ritelli

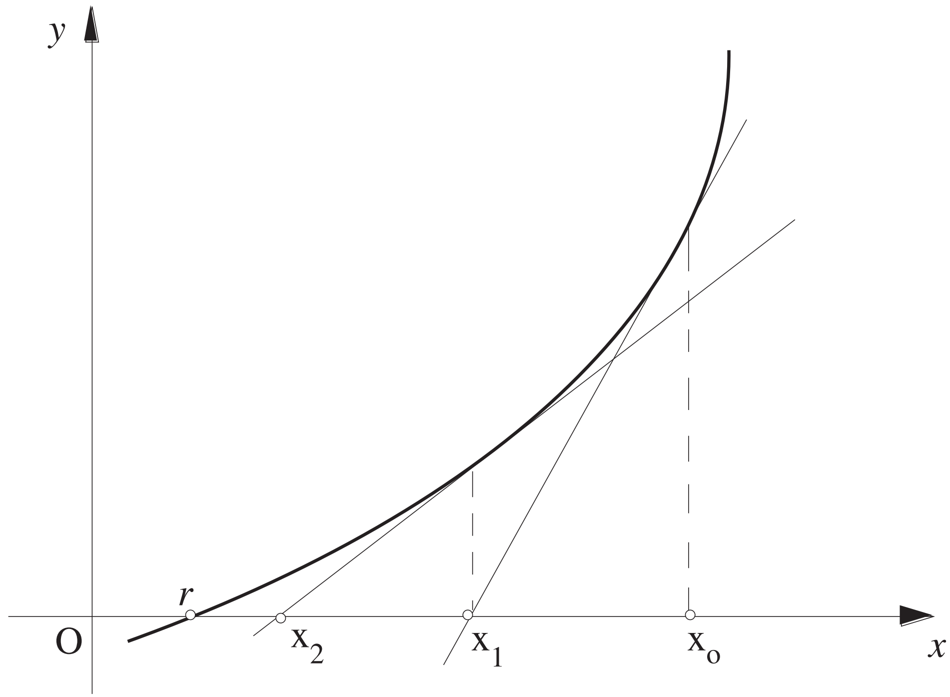
www.unibo.it/docenti/daniele.ritelli

Il metodo di Newton

Data una funzione $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ con valori di segno opposto agli estremi di $[a, b]$ se f è continua esiste almeno un elemento $r \in \,]a, b[$ per cui $f(r) = 0$. Se ammettiamo che f sia derivabile con derivata di segno costante in $]a, b[$ tale elemento r è unico.




y
r
O
x1
xo
x


y
r
O
x_2
x_1
x_o
x

$$
\begin{cases}
x_0 \in [a,b], \text{ tale che } f(x_0) \neq 0, \\[2ex]
x_n = x_{n-1} - \dfrac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}, \text{ per ogni } n \in \mathbb{N}.
\end{cases}
$$

Teorema

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^2, strettamente crescente e convessa e tale che $f(a) < 0,\ f(b) > 0$. Allora la successione:

$$\begin{cases} x_0 = b, \\ x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \end{cases}$$

converge decrescendo all'unico zero di $f(x)$ in $[a, b]$.

Metodo di Newton per trovare lo zero di $f(v) = \alpha_3 v^3 + \alpha_2 v^2 + \alpha_1 v - A$

Conduce all'iterazione della funzione

$$F(v) = v - \frac{f(v)}{f'(v)} = v - \frac{\alpha_3 v^3 + \alpha_2 v^2 + \alpha_1 v - A}{3\alpha_3 v^2 + 2\alpha_2 v + \alpha_1}$$

Esercizio Una rendita è costituita da due termini: 3 all'epoca $t = 1$ e 4 all'epoca $t = 3$. Sapendo che il suo valore attuale è di 6 determinare, in regime esponenziale il tasso unitario di interesse i.

Esercizio Una rendita è costituita da due termini: 3 all'epoca $t = 1$ e 4 all'epoca $t = 3$. Sapendo che il suo valore attuale è di 6 determinare, in regime esponenziale il tasso unitario di interesse i.

$$V(\mathcal{R}, 0) = 3(1+i)^{-1} + 4(1+i)^{-3}$$

Esercizio Una rendita è costituita da due termini: 3 all'epoca $t = 1$ e 4 all'epoca $t = 3$. Sapendo che il suo valore attuale è di 6 determinare, in regime esponenziale il tasso unitario di interesse i.

$$V(\mathcal{R}, 0) = 3(1+i)^{-1} + 4(1+i)^{-3}$$

$$v = (1+i)^{-1} \implies 4v^3 + 3v - 6 = 0$$

Esercizio Una rendita è costituita da due termini: 3 all'epoca $t = 1$ e 4 all'epoca $t = 3$. Sapendo che il suo valore attuale è di 6 determinare, in regime esponenziale il tasso unitario di interesse i.

$$V(\mathcal{R}, 0) = 3(1+i)^{-1} + 4(1+i)^{-3}$$

$$v = (1+i)^{-1} \implies 4v^3 + 3v - 6 = 0$$

Iteranda di Newton

$$F(v) = v - \frac{4v^3 + 3v - 6}{12v^2 + 3}$$

Notare che posto $f(v) = 4v^3 + 3v - 6$ è $f(0) = -6$ e $f(1) = 1$

Notare che posto $f(v) = 4v^3 + 3v - 6$ è $f(0) = -6$ e $f(1) = 1$

Pongo $v_0 = 0,75$ quindi

$$v_1 = F(v_0) = 0,75 - \frac{4 \times (0,75)^3 + 3 \times 0,75 - 6}{12 \times (0,75)^2 + 3} = 0,961538$$

Notare che posto $f(v) = 4v^3 + 3v - 6$ è $f(0) = -6$ e $f(1) = 1$

Pongo $v_0 = 0,75$ quindi

$$v_1 = F(v_0) = 0,75 - \frac{4 \times (0,75)^3 + 3 \times 0,75 - 6}{12 \times (0,75)^2 + 3} = 0,961538$$

proseguendo

$$v_2 = F(v_1) = 0,961538 - \frac{4 \times (0,961538)^3 + 3 \times 0,961538 - 6}{12 \times (0,961538)^2 + 3}$$

Notare che posto $f(v) = 4v^3 + 3v - 6$ è $f(0) = -6$ e $f(1) = 1$

Pongo $v_0 = 0,75$ quindi

$$v_1 = F(v_0) = 0,75 - \frac{4 \times (0,75)^3 + 3 \times 0,75 - 6}{12 \times (0,75)^2 + 3} = 0,961538$$

proseguendo

$$v_2 = F(v_1) = 0,961538 - \frac{4 \times (0,961538)^3 + 3 \times 0,961538 - 6}{12 \times (0,961538)^2 + 3}$$

dunque $v_2 = 0,930278$

Notare che posto $f(v) = 4v^3 + 3v - 6$ è $f(0) = -6$ e $f(1) = 1$

Pongo $v_0 = 0,75$ quindi

$$v_1 = F(v_0) = 0,75 - \frac{4 \times (0,75)^3 + 3 \times 0,75 - 6}{12 \times (0,75)^2 + 3} = 0,961538$$

proseguendo

$$v_2 = F(v_1) = 0,961538 - \frac{4 \times (0,961538)^3 + 3 \times 0,961538 - 6}{12 \times (0,961538)^2 + 3}$$

dunque $v_2 = 0,930278$

proseguendo $v_3 = F(v_2) = 0,929445$

Notare che posto $f(v) = 4v^3 + 3v - 6$ è $f(0) = -6$ e $f(1) = 1$

Pongo $v_0 = 0,75$ quindi

$$v_1 = F(v_0) = 0,75 - \frac{4 \times (0,75)^3 + 3 \times 0,75 - 6}{12 \times (0,75)^2 + 3} = 0,961538$$

proseguendo

$$v_2 = F(v_1) = 0,961538 - \frac{4 \times (0,961538)^3 + 3 \times 0,961538 - 6}{12 \times (0,961538)^2 + 3}$$

dunque $v_2 = 0,930278$

proseguendo $v_3 = F(v_2) = 0,929445$ NB $v_3 - v_2 = -0,0008321$

Se calcolo $v_4 = F(v_3)$ ritrovo le stesse prime 6 cifre decimali di v_3 e se calcolo il polinomio $f(v) = 4v^3 + 3v - 6$ in v_3 trovo $6,20288 \times 10^{-6}$

Se calcolo $v_4 = F(v_3)$ ritrovo le stesse prime 6 cifre decimali di v_3 e se calcolo il polinomio $f(v) = 4v^3 + 3v - 6$ in v_3 trovo $6,20288 \times 10^{-6}$

In effetti la radice è

$$v_* = \frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{6+\sqrt{37}} - \frac{1}{\sqrt[3]{6+\sqrt{37}}}\right)$$

Se calcolo $v_4 = F(v_3)$ ritrovo le stesse prime 6 cifre decimali di v_3 e se calcolo il polinomio $f(v) = 4v^3 + 3v - 6$ in v_3 trovo $6,20288 \times 10^{-6}$

In effetti la radice è

$$v_* = \frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{6+\sqrt{37}} - \frac{1}{\sqrt[3]{6+\sqrt{37}}}\right)$$

Non dimentichiamoci del tasso che è

$$i = \frac{1}{v} - 1 = 0,0759109$$

Se calcolo $v_4 = F(v_3)$ ritrovo le stesse prime 6 cifre decimali di v_3 e se calcolo il polinomio $f(v) = 4v^3 + 3v - 6$ in v_3 trovo $6,20288 \times 10^{-6}$

In effetti la radice è

$$v_* = \frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{6+\sqrt{37}} - \frac{1}{\sqrt[3]{6+\sqrt{37}}}\right)$$

Non dimentichiamoci del tasso che è

$$i = \frac{1}{v} - 1 = 0,0759109$$

$$\frac{2\sqrt[3]{6+\sqrt{37}}}{\left(6+\sqrt{37}\right)^{2/3} - 1} - 1$$

Indici temporali di una rendita

Scadenza media aritmetica

I capitali $C_1, \ldots, C_n$ sono impiegati per i tempi $t_1, \ldots, t_n$ al tasso i.

La scadenza media aritmetica della rendita è

$$\boldsymbol{\bar{t} = \frac{\displaystyle\sum_{s=1}^{n} t_s\, C_s}{\displaystyle\sum_{s=1}^{n} C_s}}$$

Indici temporali di una rendita

Scadenza media finanziaria

I capitali $C_1, \ldots, C_n$ sono impiegati per i tempi $t_1, \ldots, t_n$ al tasso i.

La scadenza media finanziaria della rendita è il tempo t^* tale per cui il valore attuale della rendita $\mathcal{R} = (t_s, C_s)$ sia uguale al valore attuale dell'unica posta $\sum_{s=1}^{n} C_s$ al tempo t^*.

$$t^* = \frac{\ln\left(\sum_{s=1}^{n} C_s\right) - \ln\left(\sum_{s=1}^{n} C_s (1+i)^{-t_s}\right)}{\ln(1+i)}$$

Indici temporali di una rendita

Durata media finanziaria

La durata media finanziaria (inglese *duration*) viene introdotta per raffinare il concetto di scadenza media aritmetica: si tien conto di tassi di valutazione i_s relativi al periodo $[0, s]$

$$D = \frac{\displaystyle\sum_{s=1}^{n} t_s C_s \left(1 + i_s\right)^{-t_s}}{\displaystyle\sum_{s=1}^{n} C_s \left(1 + i_s\right)^{-t_s}}$$

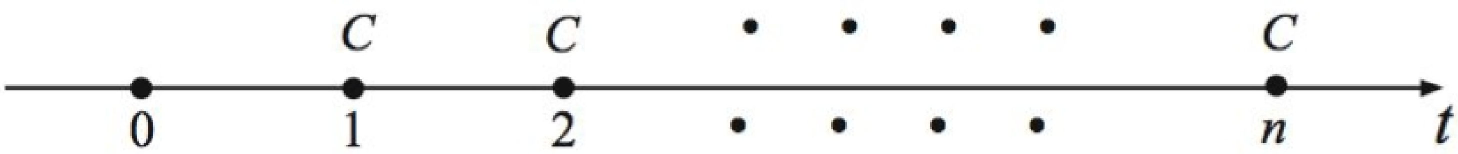
La *duration* è il baricentro delle scadenze opportunamente pesate: è un punto dove si realizza una sorta di equilibrio. Può essere quindi usato per scegliere fra diverse opzioni di investimento. Se ci aspettiamo che i tassi di interesse diminuiscano sceglieremo operazioni finanziare con duration più elevata, volendo far durare più a lungo le vecchie operazioni intraprese. Se ci aspettiamo che i tassi di interesse crescano, allora preferiamo operazioni con duration più bassa, così che le operazioni in essere finiscano prima e si possano reinvestire ad un tasso più elevato.

Rendite periodiche costanti

Data la rendita **periodica costante**

$$\mathcal{R} = \{(1; C), \ldots, (n; C)\}$$

in cui $t_s = s$, $s = 1, \ldots, n$ e $C_s = C$, $s = 1, \ldots, n$



Nell'ipotesi di struttura piatta dei tassi: $i_1 = i_2 = \cdots = i_n = i$ la duration è collegata al valore attuale della rendita

Teorema

Se la durata media finanziaria $D = D(i)$ della rendita $\mathcal{R} = (t_s, C_s)$, riferita alla struttura piatta dei tassi $i_1 = i_2 = \cdots = i_n = i$ è pensata come funzione del tasso i, allora vale

$$\boldsymbol{V(\mathcal{R}, 0) = \left(\sum_{s=1}^{n} C_s\right) \exp\left(-\int_0^i \frac{D(r)}{1+r} \mathrm{d}r\right)}$$

L'**immunizzazione finanziaria** è una strategia matematica volta a neutralizzare gli effetti della variazione del tasso di valutazione di un investimento su di un portafoglio attivo (crediti) o passivo (debiti). Assegnata una rendita temporanea di n termini $\mathcal{R} = (t_s, C_s)$ (investimento) il suo valore al tempo t ed al tasso i

$$V(i,t) = \sum_{s=1}^{n} C_s (1+i)^{t-t_s}$$

costituisce l'oggetto della immunizzazione.

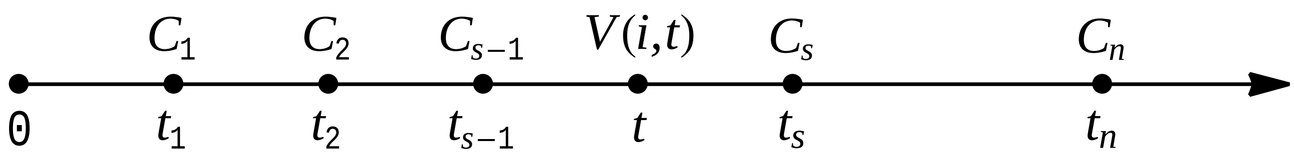


Figura 1: Asse dei tempi per $V(i,t)$

Pensiamo ora al valore della rendita calcolato al tempo t come funzione del tasso i. Il portafoglio sarà immunizzato rispetto al rischio di tasso se una variazione di tasso da i a $i + \Delta i$ non produce variazione del valore del portafoglio.

Pensiamo ora al valore della rendita calcolato al tempo t come funzione del tasso i. Il portafoglio sarà immunizzato rispetto al rischio di tasso se una variazione di tasso da i a $i + \Delta i$ non produce variazione del valore del portafoglio.

D'altra parte a seguito della variazione del tasso il valore si modifica secondo la relazione

$$\Delta V = V(i + \Delta i, t) - V(i, t)$$

dunque ci si immunizza scegliendo la durata temporale dell'investimento che annulla ΔV

Se sviluppiamo in serie di Taylor arrestata al primo ordine troviamo

$$\Delta V = V(i + \Delta i, t) - V(i, t) = \frac{\partial V}{\partial i}(i, t) \cdot \Delta i + R_1(V(i), i)$$

con $R_1(V(i), i)$ tale che

$$\lim_{\Delta i \to 0} \frac{R_1(V(i), i)}{\Delta i} = 0$$

dunque ci si immunizza scegliendo la durata temporale dell'investimento che annulla ΔV

Se sviluppiamo in serie di Taylor arrestata al primo ordine troviamo

$$\Delta V = V(i + \Delta i, t) - V(i, t) = \frac{\partial V}{\partial i}(i, t) \cdot \Delta i + R_1(V(i), i)$$

con $R_1(V(i), i)$ tale che

$$\lim_{\Delta i \to 0} \frac{R_1(V(i), i)}{\Delta i} = 0$$

Dunque per essere in una situazione di immunizzazione occorre che il tempo di detenzione del portafoglio soddisfi

$$\frac{\partial V}{\partial i}(i, t) = 0$$

Teorema di Fisher-Weil

Il tempo di immunizzazione del portafoglio $\mathcal{R} = (t_s, C_s)$ coincide con la durata media finanziaria del portafoglio.

Teorema di Fisher-Weil

Il tempo di immunizzazione del portafoglio $\mathcal{R} = (t_s, C_s)$ coincide con la durata media finanziaria del portafoglio.

Calcoliamo la derivata, rispetto al tasso i del valore del portafoglio

$$\frac{\partial V}{\partial i}(i,t) = \sum_{s=1}^{n} (t - t_s) C_s (1+i)^{t-t_s-1}$$

Teorema di Fisher-Weil

Il tempo di immunizzazione del portafoglio $\mathcal{R} = (t_s, C_s)$ coincide con la durata media finanziaria del portafoglio.

Calcoliamo la derivata, rispetto al tasso i del valore del portafoglio

$$\frac{\partial V}{\partial i}(i,t) = \sum_{s=1}^{n} (t - t_s) C_s (1+i)^{t-t_s-1}$$

Poi cerchiamo il tempo t che annulla la derivata

$$
\begin{aligned}
0 &= t\sum_{s=1}^{n} C_s(1+i)^{t-t_s-1} - \sum_{s=1}^{n} t_s C_s(1+i)^{t-t_s-1} \\
&= t\,(1+i)^{t-1}\sum_{s=1}^{n} C_s(1+i)^{-t_s} - (1+i)^{t-1}\sum_{s=1}^{n} t_s C_s(1+i)^{-t_s}
\end{aligned}
$$

ricavando t dall'ultima espressione otteniamo il tempo di immunizzazione

$$0 = t\sum_{s=1}^{n} C_s(1+i)^{t-t_s-1} - \sum_{s=1}^{n} t_s C_s(1+i)^{t-t_s-1}$$

$$= t\,(1+i)^{t-1}\sum_{s=1}^{n} C_s(1+i)^{-t_s} - (1+i)^{t-1}\sum_{s=1}^{n} t_s C_s(1+i)^{-t_s}$$

ricavando t dall'ultima espressione otteniamo il tempo di immunizzazione

$$t = \frac{(1+i)^{t-1}\sum_{s=1}^{n} t_s C_s(1+i)^{-t_s}}{(1+i)^{t-1}\sum_{s=1}^{n} C_s(1+i)^{-t_s}} = \frac{\sum_{s=1}^{n} t_s C_s(1+i)^{-t_s}}{\sum_{s=1}^{n} C_s(1+i)^{-t_s}}$$